'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 2nd Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P2-MATHEMATICS

REAL ANALYSIS

(REVISED SYLLABUS 2023)

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12

যে-কোনো ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊः

(a) Show that the sequence $\left\{\dfrac{n^3}{(n+1)^2}\right\}$ is monotonic increasing. 3

দেখাও যে $\left\{\dfrac{n^3}{(n+1)^2}\right\}$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান।

अनुक्रम $\left\{\dfrac{n^3}{(n+1)^2}\right\}$ मोनोटोनिक वृद्धि हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Check the convergence of the series $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$. 3

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$ শ্রেণীটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা কর।

क्रम $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$ अभिकेन्द्रीत हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) Let $A=[1, 2]\cup(3, 4)\cup\{5\}$. Is the set open or closed? Justify your answer. 3

ধর $A=[1, 2]\cup(3, 4)\cup\{5\}$. উক্ত সেটটি কি মুক্ত না বদ্ধ ? তোমার উত্তরের ন্যায্যতা প্রতিপাদন কর।

मानौ $A=[1, 2]\cup(3, 4)\cup\{5\}$. के दिइएको सेट open अथवा closed हो ? आफ्नो उत्तरको न्यायोचित गर।

(d) Show that the set of irrational numbers is uncountable. 3

দেখাও যে অমূলদ সংখ্যার সেটটি অগণনযোগ্য সেট হবে।

अपरिमेय (irrational) संख्याहरू अगणित हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(e) Find the derived set of the set $S=\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$. 3

$S=\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$ সেটটির derived সেটটি নির্ণয় কর।

सेट $S=\left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$ को derived set निर्णय गर।

(f) Let $x, y \in \mathbb{R}$ with $x<y$. Prove that there exists an irrational number α such that $x<\alpha<y$. 3

ধর $x, y \in \mathbb{R}$ সঙ্গে $x<y$। প্রমাণ কর একটি অমূলদ সংখ্যা α বিদ্যামান যাতে $x<\alpha<y$।

मानौ $x, y \in \mathbb{R}$, $x<y$. एउटा अपरिमेय संख्या α, $x<\alpha<y$ मा अवस्थित हुन्छ भनी प्रमाण गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions 6×4 = 24

যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै <u>चार</u> प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

2. If $x_n=(a^n+b^n)^{1/n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ and $0<a<b$, show that $\lim x_n=b$. 6

যদি $x_n=(a^n+b^n)^{1/n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ এবং $0<a<b$ হয় তবে দেখাও যে $\lim x_n=b$।

यदि $x_n=(a^n+b^n)^{1/n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ अनि $0<a<b$ हुन्छ भने प्रमाण गर $\lim x_n=b$.

3. Prove that a sequence $\{x_n\}$ of real numbers converges iff it is a Cauchy sequence. 6

প্রমাণ কর বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{x_n\}$ টি অভিসারী যদি এবং কেবলমাত্র যদি ইহা একটি Cauchy অভিসারী হয়।

वास्तविक संख्याहरूको अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिकेन्द्रित हुन्छ यदि अनि यदि मात्र त्यो एउटा Cauchy अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर।

4. (a) Prove that $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1$. 3+3

প্রমাণ করঃ $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1$.

प्रमाण गर $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}=1$

(b) Examine the convergence of the series $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$.

$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে কিনা পরীক্ষা কর।

क्रम $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$ को अभिकेन्द्रत्को जाँच गर।

5. (a) Prove that if a set contains all its limit points, then it is closed. 3+3

প্রমাণ কর যদি কোন সেটের সকল সীমা বিন্দুগুলি সেই সেটের মধ্যে থাকে তাহলে সেটটি আবদ্ধ হবে।

यदि एउटा सेटले आफ्नो सबै limit points समावेश गर्छ भने तयो एउटा closed सेट हो भनी प्रमाण गर।

(b) Show that $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ is countable.

দেখাও যে $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ সেটটি গণনযোগ্য।

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ गणनायोग्य हो भनी प्रमाण गर।

6. (a) Define closure of a set $A\subseteq\mathbb{R}$. 2+4

কোনো একটি সেট $A\subseteq\mathbb{R}$ -এর closure কে সংজ্ঞায়িত কর।

सेट $A\subseteq\mathbb{R}$ को closure को परिभाषा लेख।

(b) Let G be an open subset of $\mathbb{R}$ and $A\subseteq\mathbb{R}$. Show that $G\cap\overline{A}\subseteq\overline{G\cap A}$.

ধর G , $\mathbb{R}$ -এর একটি মুক্ত উপসেট এবং $A\subseteq\mathbb{R}$. দেখাও যে $G\cap\overline{A}\subseteq\overline{G\cap A}$.

मानौ G , $\mathbb{R}$ को open उपसेट हो अनि $A\subseteq\mathbb{R}$ प्रमाण गर $G\cap\overline{A}\subseteq\overline{G\cap A}$

7. Let $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ for $n\in\mathbb{N}$. Show that sequence $\{x_n\}$ is monotonic increasing and bounded. Also find the lower and upper bounds. 6

ধর $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, যেখানে $n\in\mathbb{N}$. দেখাও যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি একটি ক্রমবর্ধমান এবং আবদ্ধ। এছাড়াও নিম্ন সীমা (lower bound) এবং উর্ধ্বসীমাগুলি নির্ণয় কর।

मानौ $n\in\mathbb{N}$ को लागी $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. प्रमाण गर अनुक्रम $\{x_n\}$ monotonic वृद्धि अनि bounded हो। तल्लो अनि माथिल्लो bound को पनि निर्णय गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions 12×2 = 24

যে-কোনো *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै <u>दुई</u> प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

8. (a) Show that the set of rational numbers in $[0,1]$ is countable. 6

দেখাও যে $[0,1]$ -এর মধ্যে মূলদ সংখ্যার সেটটি গণনযোগ্য।

$[0,1]$ भित्रको rational संख्याहरूको सेट गणनायोग्य हो भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that the finite union of closed sets is closed. 3

প্রমাণ কর সসীম সংখ্যক বদ্ধ সেটের সংযোগ বদ্ধ সেট।

Closed सेटहरूको सीमित संघ (finite union) closed हो भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the set $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ is a closed set. 3

দেখাও যে $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ সেটটি বদ্ধ সেট।

सेट $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ closed सेटहो भनी प्रमाण गर।

9\. (a) Examine the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ where $a_n = (n^3+1)^{1/3} - n$. 6

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ যেখানে $a_n = (n^3+1)^{1/3} - n$ শ্রেণীটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা কর।

श्रृंखला (series) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ को अभिकेन्द्रत् को जाँच गर, जहाँ $a_n = (n^3+1)^{1/3} - n$ हो।

(b) Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converges. 6

প্রমাণ কর $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ শ্রেণীটি অভিসারী।

प्रमाण गर श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ अभिकेन्द्रीत हुन्छ भनी।

10.(a) If $x_n = \frac{3n-1}{n+2}$, prove that the sequence $\{x_n\}$ is monotonic increasing and bounded. 4

যদি $x_n = \frac{3n-1}{n+2}$ হয় তবে প্রমাণ কর $\{x_n\}$ অনুক্রমটি একটি ক্রমবর্ধমান এবং সীমাবদ্ধ (bounded) হয়।

यदि $x_n = \frac{3n-1}{n+2}$ भए, अनुक्रम $\{x_n\}$ monotonic वृद्धि अनि bounded हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that the sequence $\{x_n\}$, defined as $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ for $n \geq 1$, is convergent. 4

অনুক্রম $\{x_n\}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, $n \geq 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে প্রমাণ কর অনুক্রমটি অভিসারী।

$n \geq 1$ को लागी $x_1 = \sqrt{2}$ अनि $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ ले परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिकेन्द्रीत हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) Prove that if a sequence $\{x_n\}$ converges to a limit l, then any subsequence of $\{x_n\}$ must converge to l and conversely. 4

প্রমাণ কর যদি $\{x_n\}$ অনুক্রমটি l সীমাস্থ মানে অভিসারী হয় তবে যেকোন উপক্রম l-এ অভিসারী হবে। এবং বিপরীতক্রমে ইহাও সত্য।

यदि limit l मा एउटा अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिकेन्द्रीत हुन्छ भने त्यसको उपअनुक्रम $\{x_n\}$ पनि limit l मा नै अभिकेन्द्रीत हुन्छ भनी प्रमाण गर अनि यसको ठिक उल्टो पनी प्रमाण गर।

11.(a) Prove that $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{1/n}=e$. 3

প্রমাণ কর $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{1/n}=e$.

प्रमाण गर– $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{1/n}=e$

(b) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where $x_n=\frac{n!}{n^n}$ is a null sequence. 3

প্রমাণ কর $\{x_n\}$, যেখানে $x_n=\frac{n!}{n^n}$ অনুক্রমটি শূন্যক্রম (null sequence)।

$x_n=\frac{n!}{n^n}$ ले परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ एउटा शून्य अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर।

(c) Find the set of limit points of the set $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-5x+6<0\}$. 3

$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-5x+6<0\}$ সেটটির সকল সীমা বিন্দুগুলির সেটটি নির্ণয় কর।

सेट $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-5x+6<0\}$ को limit point हरूको सेट निर्णय गर।

(d) Prove that the closure of every subset of $\mathbb{R}$ is closed. 3

প্রমাণ কর $\mathbb{R}$-এর সকল উপসেটের closure একটি আবদ্ধ সেট।

$\mathbb{R}$ को प्रत्येक उपसेटको closure, closed हो भनी प्रमाण गर।

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 2nd Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P2-MATHEMATICS

ALGEBRA

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Find $\operatorname{Log} z$ and $\log z$, where $z = i$. 3

$\operatorname{Log} z$ এবং $\log z$ -এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $z = i$

$\operatorname{Log} z$ अनि $\log z$ को मान निर्णय गर, $z = i$

2. Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ 3

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স্ -এর র‍্যাঙ্ক্ নির্ণয় কর।

Matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ को rank निर्णय गर।

3. Prove that the sum of the 99th powers of the roots of the equation $x^5 = 1$ is zero. 3

প্রমাণ কর যে, $x^5 = 1$ সমীকরণের বীজগুলির 99-তম ঘাতের যোগফল শূন্য।

समिकरण $x^5 = 1$ को मूलको (roots) 99th power शून्य हुन्छ भनी प्रमाण गर।

4. Show that the mapping $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ defined by $f(n)=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$ is surjective but not injective. 3

দেখাও যে, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, যেখানে $f(n)=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$ চিত্রণটি সার্জেকটিভ কিন্তু ইনজেক্টিভ নয়।

$f(n)=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$ को परिभाषित mapping $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ surjective हो तर injective होइन भनी प्रमाण गर।

5. If ρ be an equivalence relation on a set S and $a,b\in S$, then prove that $cl(a)=cl(b)$ if and only if $a\rho b$ holds. 3

যদি ρ, S সেট-এর উপর সমার্থকতা সমতুল্যতা (equivalence) সম্পর্ক হয় এবং $a,b\in S$, তবে দেখাও যে $cl(a)=cl(b)$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a\rho b$ সিদ্ধ হয়।

सेट S मा ρ एउटा equivalence सम्बन्ध हो अनि $a,b\in S$, $cl(a)=cl(b)$ यदि अनि यदि मात्र $a\rho b$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

6. A function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=3x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Prove that f is invertible and find f^{-1}. 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিত রূপে সংজ্ঞায়িতঃ $f(x)=3x+1$, $x\in\mathbb{R}$. প্রমাণ কর যে, f বিপরীত প্রক্রিয়া যোগ্য (invertible) এবং f^{-1} নির্ণয় কর।

$f(x)=3x+1$, $x\in\mathbb{R}$ ले परिभाषित एउटा फलन $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ छ। f invertible हो भनी प्रमाण गर अनि f^{-1} निर्णय गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following $6\times4=24$

নিম্নলিখিত যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. (a) Give an example of a relation which is symmetric and transitive but not reflexive. 2

একটি সম্পর্কের উদাহরণ দাও যা প্রতিসম (Symmetric) এবং সকর্মক (Transitive) কিন্তু প্রতিফলিত (reflexive) নয়।

Symmetric अनि transitive भएको तर reflexive नभएको एउटा सम्बन्धको उदाहरण देऊ।

(b) Let $f:A\to B$ be a mapping and P,Q be non-empty subsets of A. Show that $f(P\cup Q)=f(P)\cup f(Q)$. 4

$f:A\to B$ একটি চিত্রণ (Mapping) এবং $P,Q\subseteq A$, $P\neq\phi$, $Q\neq\phi$. দেখাও যে $f(P\cup Q)=f(P)\cup f(Q)$.

मानौ $f: A \to B$ एउटा mapping हो अनि P, Q सेट A को non-empty उपसेटहरू भए $f(P \cup Q) = f(P) \cup f(Q)$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

8. Solve the following equation by Cardan's method: $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$. 6

Cardan's পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

Cardan को पद्धति द्वारा दिइएको समिकरणको समाधान गर– $x^3 + 9x^2 + 15x - 25 = 0$

9. Find two integers u and v satisfying $54u + 24v = 30$. 6

$54u + 24v = 30$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, u ও v-এর এরূপ পূর্ণ মান (integer solution) নির্ণয় কর।

$54u + 24v = 30$ लाई satisfy गर्ने दुई पूर्णांक u अनि v को निर्णय गर।

10. Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 6

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির র‍্যাঙ্ক নির্ণয় কর।

Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ को rank निकाल।

11. Solve completely the following system of equation: 6

$$x + 2y + 3z = 0,\ 2x + 3y + 4z = 0,\ 3x + 4y + 5z = 0$$

সম্পূর্ণভাবে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান নির্ণয় করঃ

$$x + 2y + 3z = 0,\ 2x + 3y + 4z = 0,\ 3x + 4y + 5z = 0$$

तल दिइएको समिकरणहरूको प्रणालीको समाधान देऊ।

$$x + 2y + 3z = 0,\ 2x + 3y + 4z = 0,\ 3x + 4y + 5z = 0$$

12. If x, y, z be positive real numbers and $x + y + z = 1$, prove that 6

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}.$$

যদি x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x + y + z = 1$, প্রমাণ কর যে

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}$$

यदि x, y, z धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए अनि $x+y+z=1$ भए, प्रमाण गर

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}.$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোনো *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

13.(a) Expand $\cos^7\theta$ in a series of cosines of multiple of θ. 6

$\cos^7\theta$ কে θ-র গুণিতক বিশিষ্ট কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত কর।

θ को गुणांक भएको cosines को श्रृंखला मा $\cos^7\theta$ लाई विस्तार गर।

(b) Solve by Ferrari's method $x^4+12x-5=0$. 6

Ferrari-র পদ্ধতির সাহায্যে $x^4+12x-5=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

Ferrari को पद्धतिद्वारा समाधान गर– $x^4+12x-5=0$.

14.(a) If a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 be all positive, then prove that 6

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^5 \ge \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4+a_5}{3}\right)^3$$

যদি a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^5 \ge \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4+a_5}{3}\right)^3$$

यदि a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 सबै धनात्मक भए प्रमाण गर

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^5 \ge \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4+a_5}{3}\right)^3$$

(b) If $ax \equiv ay \pmod{m}$ and a is prime to m, then show $x \equiv y \pmod{m}$. 6

যদি $ax \equiv ay \pmod{m}$ এবং a ও m পরস্পর মৌলিক (prime to each other), তবে দেখাও যে, $x \equiv y \pmod{m}$

यदि $ax \equiv ay \pmod{m}$ अनि a, m संग prime भए, $x \equiv y \pmod{m}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

15.(a) If $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, then use Cayley-Hamilton's theorem to show that 7

$$2A^5-3A^4+A^2-4I=138A-403I.$$

যদি $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, তবে Cayley-Hamilton -এর উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে,

$$2A^5-3A^4+A^2-4I=138A-403I.$$

यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ भए, Cayley-Hamilton को उपपाद्य प्रयोग गरी प्रमाण गर

$$2A^5-3A^4+A^2-4I=138A-403I.$$

(b) If R and S are equivalence relations on the set A, prove that $R\cap S$ is an equivalence relation. 5

যদি R এবং S, A সেট-এর সমার্থকতা সমতুল্যতা সম্পর্ক হয়, দেখাও যে $R\cap S$ সমার্থকতা সমতুল্যতা সম্পর্ক।

यदि सेट A मा, R अनि S equivalence सम्बन्धहरू भए, $R\cap S$ पनि equivalence सम्बन्ध हुन्छ भनी प्रयोग गर।

16.(a) If $\sin(\alpha+i\beta)=x+iy$, then prove that 6

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha}-\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=1 \text{ and } \frac{x^2}{\cosh^2\beta}+\frac{y^2}{\sinh^2\beta}=1$$

যদি $\sin(\alpha+i\beta)=x+iy$, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha}-\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=1 \text{ এবং } \frac{x^2}{\cosh^2\beta}+\frac{y^2}{\sinh^2\beta}=1$$

यदि $\sin(\alpha+i\beta)=x+iy$ भए, प्रमाण गर

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha}-\frac{y^2}{\cos^2\alpha}=1 \text{ अनि } \frac{x^2}{\cosh^2\beta}+\frac{y^2}{\sinh^2\beta}=1$$

(b) Prove that $(n+1)^n>2^n n!$, where $n\in\mathbb{N}$. 6

প্রমাণ কর যে $(n+1)^n>2^n n!$ যেখানে $n\in\mathbb{N}$

प्रमाण गर $(n+1)^n>2^n n!$, $n\in\mathbb{N}$.

——×——